

Előadás követő fóliák a Matematika mérnököknek I. című tárgyhoz

Burai Pál

Komplex számok

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

A képzetes egység

Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$x^2 + 1 = 0$$

Azt a számot, amelynek a négyzete -1 **képzetes egység**nek nevezzük és i -vel jelöljük. Tehát

$$i^2 = i \cdot i = -1.$$

Komplex számok algebrai alakja

Legyenek a, b valós számok, ekkor a

$$z = a + ib$$

számot **algebrai alakban** adott **komplex számnak** nevezzük, melynek **valós része** a , **képzetes része** pedig b . Jelölésben:

$$\operatorname{Re}(z) = a, \operatorname{Im}(z) = b.$$

A komplex számok halmazát \mathbb{C} -vel jelöljük.

Feladat

Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán! Ábrázolja a megoldásokat a komplex számsíkon!

(a) $x^3 + 7x = 0$,

(b) $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Számolás algebrai alakban adott komplex számokkal

Legyenek $z = a + ib$, $w = u + iv$ komplex számok, ekkor

$$z + w = (a + u) + i(b + v), \quad z \cdot w = (au - bv) + i(av + bu).$$

Feladat

Adja meg a következő komplex számok algebrai alakját:

(a) $(2 - i)(2 + i)$, $(-2 - 5i)(5 - 2i)$, $(-1 - i)(1 + i)(7 + 6i)$,

(b) $\sqrt{2}i(1 + \sqrt{2}i)$, $(1 + i)^3$, $i^9 + i^7 - i^4 + i^2 - i - 1$, i^{2017} .

Komplex számok konjugáltja és inverze

Ha $z = a + ib$, akkor a

$$\bar{z} = a - ib$$

komplex számot z **konjugáltjának** nevezzük. Ha ráadásul $z \neq 0$, akkor

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

a z komplex szám **multiplikatív inverze** azaz, $z \cdot z^{-1} = 1$.

Feladat

Adja meg a következő komplex számok algebrai alakját:

(a) $\overline{2 - i}$, $\overline{(-3 + i)(1 + i)}$,

(b) $\frac{-3 + 3i}{1 - i}$, $\frac{1 + i}{-i - 3}$.

Komplex számok hossza és szöge

Ha a $z = a + ib$ komplex számot a síkon az origót az (a, b) ponttal összekötő vektorral azonosítjuk, akkor a Pitagorasz tétel szerint ezen vektor hossza

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

amit a z **komplex szám hosszának** nevezünk. Amennyiben z nem nulla, akkor azt a szöget (φ_z), amelyet ez az általa meghatározott vektor a valós tengely pozitív felével bezár, a z **komplex szám szögének** nevezünk. Ha $a, b \geq 0$, akkor

$$\tan \varphi_z = \frac{b}{a}.$$

Hasonlóan kiszámítható a szög, ha z nem az első síknegyedben van. A nulla komplex számnak nincsen szöge!

Ha φ_z a z komplex szám szöge és $|z|$ a hossza, akkor

$$z = |z|(\cos \varphi_z + i \sin \varphi_z)$$

alakban is előállítható, melyet a z **komplex szám trigonometrikus alakjának** nevezünk.

Feladat

Adja meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját!

- (a) 1, (b) i , (c) $1 - i$, (d) $-1 - \sqrt{3}i$,

Trigonometrikus alakban adott komplex számokkal való számolás

Ha $z = |z|(\cos \varphi_z + i \sin \varphi_z)$ és $w = |w|(\cos \varphi_w + i \sin \varphi_w)$, akkor

$$z \cdot w = |z||w|(\cos(\varphi_z + \varphi_w) + i \sin(\varphi_z + \varphi_w)).$$

Ha $w \neq 0$, akkor

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi_z - \varphi_w) + i \sin(\varphi_z - \varphi_w)).$$

Feladat

Legyen $x = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ és $y = 11 \left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right)$. Határozza meg az alábbi kifejezések értékét!

- (a) xy , (b) xy^{-1} , (c) x^3 , (d) y^5 , (e) $\frac{1}{x}$,

Komplex számok n . gyöke.

Ha $z = |z|(\cos \varphi_z + i \sin \varphi_z)$ komplex szám, n pedig egy természetes szám, akkor a $\zeta^n = z$ egyenletnek n darab különböző megoldása van, melyeket a z komplex szám n . **gyökeinek** nevezünk. Ezeket a következő képlettel adhatjuk meg:

$$\zeta_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi_z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi_z + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Feladat

Számítsa ki a $z = 128 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ komplex szám második, harmadik, negyedik gyökeit! Ábrázolja a gyököket a komplex számsíkon!

Euler azonosság

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Komplex számok exponenciális alakja

Ha egy komplex szám trigonometrikus alakja $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, akkor a

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

alakot a z **komplex szám exponenciális alakjának** nevezzük.

Exponenciális alakban adott komplex számok osztása és szorzása

Legyen $z = |z|e^{i\varphi}$ and $w = |w|e^{i\psi}$, ekkor

$$zw = |z||w|e^{i(\varphi+\psi)}, \quad \text{és} \quad \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}e^{i(\varphi-\psi)}.$$

Hatványozás exponenciális alak esetén

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi}.$$

Periodicitás

$$|z|e^{i\varphi} = |z|e^{i(\varphi+2\pi)}$$

Feladatok

Számítsuk ki a zw szorzatot és a $\frac{z}{w}$ hányadost!

- $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}, w = 4e^{i\frac{\pi}{4}}.$
- $z = -3e^{i10}, w = 3e^{-i10}.$
- $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}, w = \sqrt{18}e^{i\frac{\pi}{6}}.$

Feladatok

Számítsuk ki a z n . hatványát!

- $z = \sqrt[3]{5}e^{i\frac{\pi}{6}}, n = 3.$
- $z = 2e^{i\frac{\pi}{5}}, n = 5.$
- $z = e^{i\frac{\pi}{5}}, n = 10.$

Feladatok

- Ábrázolja a következő komplex számokat a komplex síkon!
Határozza meg a képzetes illetve a valós részüket! $z_1 = 2 + 3i$,
 $z_2 = -10 + 2i$, $z_3 = 10 + 2i$, $z_4 = 2 - 3i$, $z_5 = -2 - 3i$.
- Az Euler formula felhasználásával számítsa ki $\cos \varphi$ és $\sin \varphi$ értékét és adja meg a következő komplex számokat algebrai alakban! $e^{i\pi}$, $e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- Adja meg a $z_1 = 1 - i$ komplex szám trigonometrikus illetve exponenciális alakját! Számítsa ki a negyedik hatványát!
- Határozza meg a $\frac{(1+i)^2}{\sqrt{2}(1-i)}$ komplex szám valós és képzetes részét!
- Határozza meg a következő másodfokú polinomok gyökeit!
 - $x^2 + 4x + 13$.
 - $x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{25}{16}$.
- Adja meg a harmadik, negyedik és az ötödik egységgyököket!